

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/90 (1962)

M. Puglisi: EFFETTO DEL CARICO ELETTRONICO SULLE CAVITA'  
RISONANTI DELLE MACCHINE ACCELERATRICI ORBITALI.

Estratto dal: CNEN - RT/EL(62)15.

Comitato Nazionale Energia Nucleare

*M. Puglisi*

**EFFETTO DEL CARICO ELETTRONICO  
SULLE CAVITÀ RISONANTI  
DELLE MACCHINE ACCELERATRICI ORBITALI**

RT/EL (62) 15

Roma, settembre 1962

## INDICE

§ 1) - Introduzione . . . . .	pag. 5
§ 2) - Schematizzazione del problema . . . . .	» 6
§ 3) - Analisi del circuito . . . . .	» 8
§ 4) - Considerazioni qualitative . . . . .	» 10
§ 5) - Le condizioni di adattamento . . . . .	» 11
§ 6) - I parametri equivalenti del fascio . . . . .	» 14
§ 7) - Considerazioni generiche di progetto . . . . .	» 17
§ 8) - Critica alle considerazioni di progetto . . . . .	» 19
Appendice . . . . .	» 25
Bibliografia . . . . .	» 33

## § 1) - INTRODUZIONE

Nelle macchine acceleratrici orbitali il fascio di particelle cariche viene generalmente accelerato mediante un campo elettrico ad alta frequenza. Nella maggioranza dei casi tale campo è prodotto da una o più cavità risonanti. Le considerazioni che faremo, valide nel caso di una o più cavità, non si applicano ovviamente al caso degli acceleratori lineari dove il meccanismo dello scambio di energia tra guida e particelle e la reazione sul generatore non sono funzioni solamente del numero di cavità che compongono la struttura acceleratrice della macchina.

Introdurremo le seguenti ipotesi.

- 1) Le particelle cariche si muovono su orbite chiuse con velocità costante ed hanno un'energia molto maggiore (almeno 10 volte) di quella che potrebbero ricevere al massimo da ciascun risuonatore.
- 2) Le cavità acceleratrici possono essere di forma qualunque e si presuppone che siano alimentate nel modo fondamentale.
- 3) Il coefficiente di accoppiamento  $\mu$  tra fascio circolante e risuonatore dipende solo dalla geometria dei risuonatori. Per ogni tipo di risuonatore questo coefficiente viene ad essere uguale ad un numero compreso tra zero ed uno, calcolabile caso per caso <sup>1)</sup>. Quindi se con  $I_e$  viene indicata la corrente circolante nella macchina, allora  $I_f = \mu I_e$  indicherà il componente fondamentale della corrente equivalente del fascio ai fini della interazione con il risuonatore.
- 4) La corrente circolante nella macchina è costante ossia non dipende dalla relazione di fase tra la tensione applicata e la corrente stessa per un dato risuonatore.

Questa ipotesi si può giustificare subito, pensando che il fascio circolante nella macchina subisca l'azione di molti risuonatori, distribuiti lungo la sua orbita, eccitati in modo

tale da consentire la stabilità del fascio anche se la tensione di uno solo di essi (quello in esame) ha fase arbitraria rispetto alla corrente del fascio.

Con le ipotesi premesse è possibile studiare il caso più generale della interazione del risonatore con il fascio dal punto di vista, non tanto della stabilità della macchina, quanto da quello della reazione del fascio sul risonatore in studio e sugli impianti che lo eccitano.

## § 2) - SCHEMATIZZAZIONE DEL PROBLEMA

Il sistema che viene preso in esame è quello rappresentato in fig. 1. Cioè un risonatore a cavità, per esempio di tipo rientrante, viene sottoposto all'azione simultanea dell'amplificatore

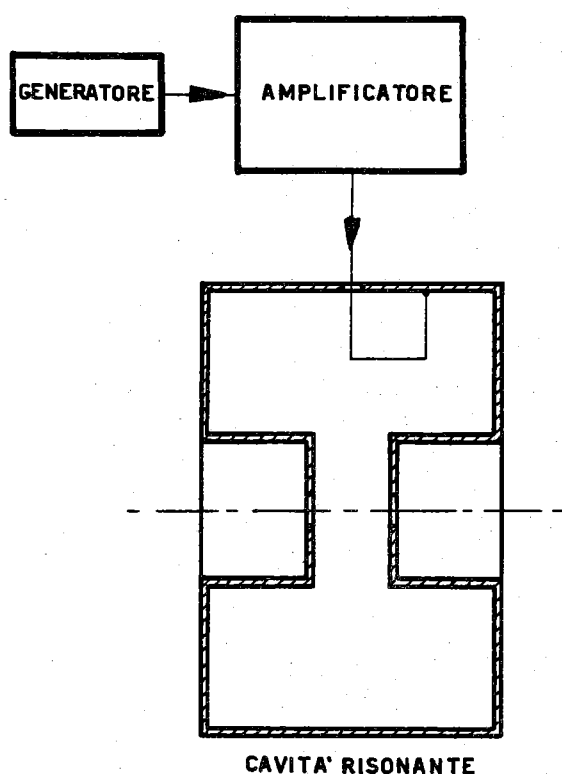


Fig. 1

che lo eccita e del fascio di particelle da accelerare che lo attraversa.

In fig. 1 è riportato uno schema a blocchi del sistema più usato in pratica, per quanto siano possibili molte varianti sul tema.

Il generatore esterno, composto da un auto oscillatore e da un sistema di amplificatori, è genericamente accoppiato al risonatore per mezzo di una spira posta nella zona «magnetica» del risonatore.

I calcoli che seguono sono fatti con riferimento al particolare tipo di accoppiamento indicato, ma le conclusioni raggiunte hanno carattere generale. Il fascio di particelle da accelerare attraversa il risonatore al «gap», ossia nella zona lungo la

quale si ha sempre la maggior tensione e l'accoppiamento con il fascio è praticamente completamente capacitivo.

Nel nostro caso la frequenza fondamentale della tensione e della corrente che eccitano il risonatore deve essere ritenuta costante e per ovvie ragioni di impiantistica questa frequenza deve essere sempre molto vicina (possiamo dire entro 1%) alla frequenza propria del risonatore.

E' lecito pertanto schematizzare quest'ultimo con un circuito a costanti concentrate nel quale gli elementi  $r$ ;  $L$ ; e  $C$  sono scelti in modo da corrispondere agli elementi  $Q_0$ ;  $R_0$ ;  $\omega_0$  caratteristici del risuonatore nell'intorno del modo fondamentale <sup>2)</sup> e del cammino di integrazione scelto per definirne la tensione utilizzabile.

Da quanto detto discende che il più elementare circuito che ancora possa interpretare i complessi fenomeni in studio è quello rappresentato in Fig. 2. Qui il generatore e l'amplificatore sono sostituiti dal generatore ideale di tensione che ha resistenza di uscita  $\rho$  e tensione propria  $V_g$ .

Il trasferimento di energia tra il generatore e la cavità avviene tramite la mutua induzione  $M$  che esiste tra la spira di accoppiamento del circuito primario e l'induttanza che compare nel circuito equivalente del risuonatore. Il fascio circolante nella macchina (che deve avere intensità e fase costante per ipotesi) è schematizzata dal generatore ideale  $I_f$ .

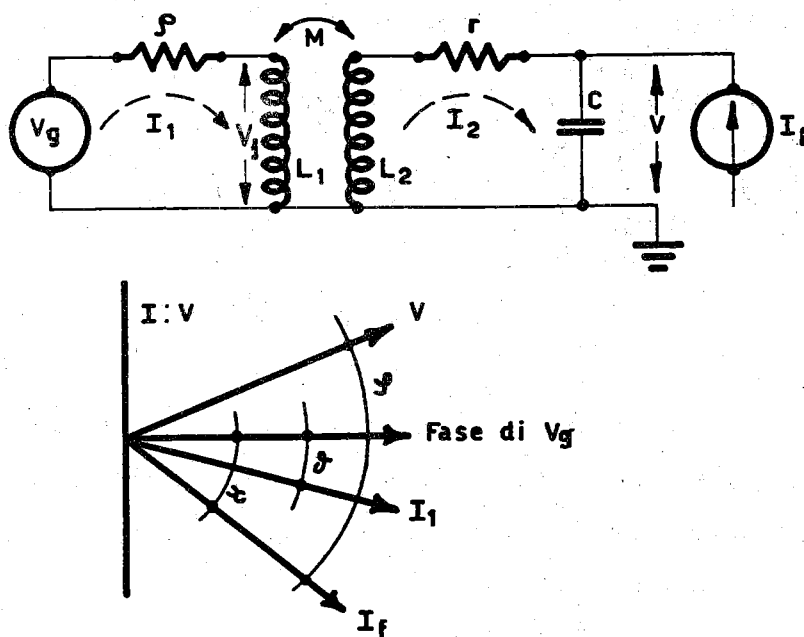


Fig. 2

Occorre osservare a questo punto che è lecito assumere puramente sinusoidale la tensione erogata dal generatore esterno mentre ciò non è vero per la corrente del fascio di particelle. Lo sviluppo che segue è fatto per il componente fondamentale della corrente del fascio e può essere ripetuto per tutte le altre componenti. Il risultato si può ottenere come somma vettoriale dei risultati dovuti agli effetti delle singole componenti.

Notiamo però che gli effetti dei componenti di ordine superiore della corrente del fascio possono avere effetto trascurabile sulla tensione totale del risuonatore se questo ha un elevato fattore di merito per il modo fondamentale ed è costruito in modo da evitare o rendere minima l'eccitazione di modi di ordine superiore.

Poiché i risuonatori in questione vengono costruiti tenendo presente queste esigenze è possibile tener conto solamente dell'effetto della componente fondamentale della corrente che circola nella macchina.

§ 3) - ANALISI DEL CIRCUITO

Con riferimento alla fig. 2 scriviamo le equazioni di equilibrio in funzione della variabile complessa  $p$ .

Per comodità di scrittura lo schema di fig. 2 viene ridisegnato come in fig. 3, dove, al posto del generatore di corrente, compare un generatore di tensione che esce sulla impedenza  $\sigma$ . Successivamente facendo tendere  $\sigma$  all'infinito e la  $V$  del generatore ad  $I_1\sigma$  e cioè all'infinito, ci riportiamo nelle condizioni di fig. 2.

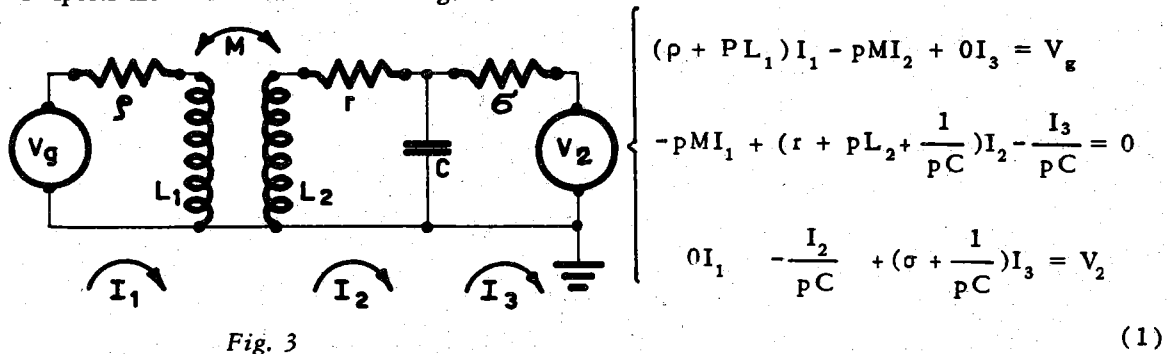


Fig. 3

Risolvendo il sistema, facendo tendere  $\sigma$  ad infinito come detto e passando dalla variabile  $p$  alla variabile  $j\omega$  in quanto studiamo gli stati stazionari, si ottengono le espressioni della  $V$  ai capi della capacità  $C$  e la corrente  $I_1$  erogata dal generatore.

Queste valgono

$$\vec{V} = \frac{(\gamma \sin x - \beta \cos x)I_f + j[\alpha V_g - (\beta \sin x + \gamma \cos x)I_f]}{p + jQ}$$

$$\vec{I}_1 = \frac{[V_g(1-\xi) - \alpha I_f \sin x] + j(\eta V_g + \alpha I_f \cos x)}{p + jQ}$$

Convenzionalmente l'asse di riferimento delle fasi è dato dalla direzione di  $V_g$ .

Nelle espressioni (2) sono stati adottati i seguenti simboli:

$$x = \text{angolo tra la corrente del fascio e la tensione } V_g \text{ di riferimento}$$

$$\alpha = \omega M$$

$$\beta = r\rho - \omega^2 L_1 L_2 (1 - K^2)$$

$$\gamma = \omega(L_2\rho + L_1 r)$$

$$P = \rho - \omega^2 C(L_2\rho + L_1 r)$$

$$Q = \omega L_1 + \omega C[r\rho - \omega^2 L_1 L_2 (1 - K^2)]$$

$$\xi = \omega^2 L_2 C$$

$$\eta = \omega r C$$

Dalle equazioni (2) si può ricavare l'angolo, sotto forma di tangente, che la tensione  $V$  fa con la corrente  $I_f$ ; ovviamente questo angolo è funzione sia di  $I_f$ , sia di  $x$ , per una certa scelta dei parametri del risonatore e del generatore  $V_g$ . Eseguendo alcuni complicati passaggi si trova

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu' - \lambda' - \operatorname{tg} x - \mu' \lambda' \operatorname{tg} x}{1 + \mu' \lambda' + (\mu' - \lambda') \operatorname{tg} x} \quad (3)$$

dove  $\mu'$  e  $\lambda'$  rappresentano due tangenti ausiliarie definite come segue:

$$\mu' = \frac{\alpha V_g - \beta \sin x - \gamma \cos x}{(\gamma \sin x - \beta \cos x) I_f} ; \quad \lambda' = \frac{Q}{P} \quad (4)$$

Le formule (2) e (3) risolvono il problema di verifica in quanto dati tutti i valori è possibile calcolare la tensione  $V$  e l'angolo  $\varphi$  tra la tensione stessa e la corrente del fascio.

Le formule predette però non consentono facilmente il calcolo di progetto e vedremo come questo possa essere eseguito con formule molto più semplici.

Intanto osserviamo quanto segue:

La tensione  $V$  è funzione sia della tensione del generatore sia della corrente del fascio e può essere ottenuta come somma vettoriale dei due effetti considerati separatamente. I diagrammi riportati nella fig. 4 chiariscono la situazione.

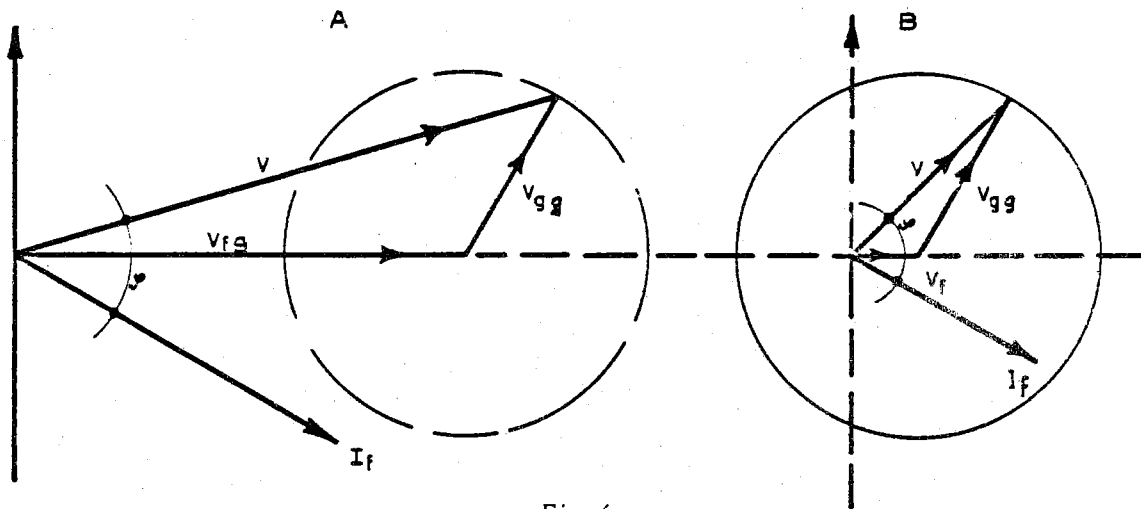


Fig. 4

In entrambi i diagrammi si è assunto l'asse delle fasi coincidente con la direzione di  $V_{fg}$ . La tensione al gap dovuta all'effetto del solo fascio è indicata con  $V_{fg}$ ; la tensione dovuta allo effetto del solo generatore è indicata con  $V_{gg}$ ; la risultante  $V = V_{gg} + V_{fg}$  individua in modulo e angolo il vettore  $V$  dovuto all'effetto simultaneo del generatore e del fascio sul risonatore. In entrambi i casi il diagramma polare che correla la tensione  $V$  e l'angolo  $\varphi$  è un cerchio che con-



tiene o meno l'origine a seconda che la  $V_{fg}$  sia minore o maggiore di  $V_{gg}$ . In altri termini saranno possibili tutte le fasi tra  $V$  ed  $I_f$  solo se  $V_{gg}$  è maggiore di  $V_{fg}$ ; viceversa se  $V_{gg} < V_{fg}$  solo un certo intervallo di fasi sarà possibile. Al limite per  $V_{gg}$  che tende a zero rimane il solo effetto del fascio e la tensione  $V_{fg}$  ha fase fissa rispetto a  $I_f$  <sup>3)</sup>.

#### § 4) - CONSIDERAZIONI QUALITATIVE

L'analisi del circuito ed il calcolo di progetto che svilupperemo devono condurre a realizzare le migliori condizioni per eccitare il risuonatore. Occorre precisare questo punto.

La tensione eccitatrice che si localizza ai capi della spira di accoppiamento dipende sia dai parametri del risuonatore sia dalla corrente del fascio (modulo e fase della corrente rispetto alla tensione totale). Questa tensione darà luogo ad una corrente  $I_1$  che circola nella maglia del generatore e che in generale non sarà in fase con la  $V_g$ . Imporre al circuito la condizione di adattamento significa imporre alla corrente  $I_1$  di essere in fase con la tensione  $V_g$  ed avere modulo uguale a  $V_g/2\rho$ . Si deve osservare però che la corrente  $I_1$  risulta dalla somma di due vettori e cioè la corrente dovuta al generatore  $V_1$  e la corrente dovuta al fascio; queste due correnti quindi, che per il momento indicheremo con  $I_1^g$  ed  $I_1^f$  devono comparire nel circuito primario in modo da avere i componenti in quadratura rispetto alla fase di  $V_g$  con verso opposto e modulo uguale, se vogliamo che la corrente totale risulti reale.

Questo fatto sarà possibile solo per quei valori dei vari parametri che soddisfano la relazione

$$\frac{\eta V_g + \alpha I_f \cos x}{V_g (1 - \xi) - \alpha I_f \sin x} = \frac{Q}{P} \quad (5)$$

Risolvendo la (5) in funzione del valore di  $\sin x$  si trova

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0 \quad (6)$$

dove le costanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono definite come segue

$$a = 1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2$$

$$b = 2 \frac{Q}{P} \frac{V_g}{\alpha I_f} \left[\eta - \frac{Q}{P} (1 - \xi)\right]$$

$$c = \left(\frac{V_g}{I_f \alpha}\right)^2 \left[\frac{Q}{P} (1 - \xi) - \eta\right]^2 - 1$$

La (6) avrà soluzione accettabile ( $|\sin x| \leq 1$ ) solo per certi valori delle costanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , che a loro volta sono funzioni dei parametri del circuito e delle caratteristiche di eccitazione.

Quindi dato un certo circuito con certe condizioni di eccitazione non sarà in generale possibile trovare un valore di  $x$  che soddisfi la (6).

Troveremo nel seguito quali condizioni devono essere soddisfatte perché ciò avvenga; è intuibile fin da ora che la possibilità di avere corrente puramente reale sul circuito primario (e cioè di trovare un valore di  $x$  reale che soddisfi la (6)) dipende fortemente dal valore della pulsazione di risonanza propria del risuonatore, in relazione alla pulsazione di eccitazione. E' anche immediato convincersi che le due pulsazioni non dovranno in generale coincidere.

Questo punto è molto importante e ne vedremo presto l'importanza quantitativa; qualitativamente ciò significa che il fascio circolante nella macchina altera il regime delle correnti attive e reattive nel risuonatore e pertanto si deve imporre al risuonatore di operare come trasformatore di impedenza in senso generalizzato. 4) 5)

#### §5) - LE CONDIZIONI DI ADATTAMENTO

In generale si vuole che la cavità in questione ceda energia al fascio circolante nella macchina. Al gap della cavità avviene lo scambio; possiamo pensare allora, ma solo per quanto riguarda la cessione di energia, che in parallelo alla capacità  $C$ , con la quale si schematizza il gap, venga posta una resistenza  $R_t$  tale da tener conto sia della cessione di energia

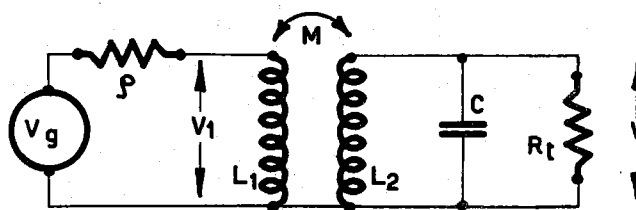


Fig. 5

al fascio, sia delle perdite proprie del risuonatore (\*). In questo caso, e con riferimento

(\*) Le perdite nel risuonatore sono prevalentemente di tipo serie e come tali dovrebbero essere portate in conto come è stato fatto esaminando il circuito alimentato sia dal generatore che dal fascio. Nel calcolo che segue, al solo scopo di semplificare le operazioni, si è introdotta una sola resistenza  $R_t$  dove viene dissipata tutta l'energia ceduta dalla spira di accoppiamento al risuonatore. Questa schematizzazione è tanto più accurata quanto più alto è il fattore di merito del risuonatore ed in ogni caso non cambia la natura del fenomeno in studio.

alla fig. 5 le equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} (\rho + pL_1)I_1 - pMI_2 + 0I_3 = V_g \\ -pMI_1 + (pL_2 + \frac{1}{pC})I_2 - \frac{I_3}{pC} = 0 \\ 0 - \frac{I_2}{pC} + (\frac{1}{pC} + R_t)I_3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Osserviamo che i valori di  $R_t$  e  $C$ , attualmente arbitrari, possono tener conto rispettivamente degli scambi di energia e delle reattanze, reali o equivalenti, introdotte dal particolare meccanismo con il quale avviene lo scambio di energia menzionato. (Proprio in vista di questa ragione si è adottato lo schema con gli elementi in parallelo).

Risolvendo il sistema (7) ed indicando con  $V_1$  la tensione che si localizza ai capi di  $L_1$  si trova:

$$V = V_1 \frac{MR_t}{p^2 CR_t (L_1 L_2 - M^2) + p(L_1 L_2 - M^2) + pL_1 R_t} \quad (8)$$

$$I_1 = V_1 \frac{p^2 L_2 CR_t + pL_2 + R_t}{p[p^2 CR_t (L_1 L_2 - M^2) + p(L_1 L_2 - M^2) + L_1 R_t]}$$

Imporre al sistema (8) la condizione di adattamento significa imporre che la soluzione  $V_1 = \rho I_1$  sia verificata in modulo ed in argomento.

Quindi la seconda delle equazioni (8) si traduce nelle due condizioni

$$\begin{aligned} p^2(L_1 L_2 - M^2 - L_2 C \rho R_t) - \rho R_t &= 0 \\ p^3(CR_t L_1 L_2 - CM^2 R_t) + p(L_1 R_t + L_2 \rho) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

se è verificata la condizione di adattamento.

Risolvendo il sistema delle (9); ponendo  $p = j\omega$ , dato che si studia il regime stazionario, si possono determinare due dei 4 parametri del circuito dato e precisamente

$$L_1 = \frac{\rho}{R_t} [L_2 - R_t C (1 - \omega^2 L_2 C)]$$

$$M^2 = \frac{\rho}{R_t} [L_2^2 + (\frac{R_t}{\omega})^2 (1 - \omega^2 L_2 C)^2] \quad (10)$$

Le espressioni (10) possono per comodità di calcolo essere poste nella forma (10 bis) introducendo i parametri caratteristici del circuito. Si ha

$$L_2 = \frac{R_t}{\omega_0 Q} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{\rho}{R_t} \{1 - Q^2 [1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]\} \quad (10 \text{ bis})$$

$$C = \frac{Q}{\omega_0 R_t} \quad K = \pm \sqrt{\frac{1 + (\frac{\omega_0}{\omega})^2 Q^2 [1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2}{1 - Q^2 [1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]}}$$

dove  $k$  è definito dalla

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Quindi per un dato valore di  $\rho$  e di  $R_t$ , fissando arbitrariamente (almeno fino a questo punto) i valori di  $\omega_0$  e di  $Q$ , si calcolano i valori degli elementi del circuito nell'ipotesi di cessione di energia ad una resistenza, equivalente agli effetti energetici del fascio, e con il generatore adattato.

Si può verificare che quando siano soddisfatte le condizioni (9) la prima delle equazioni (8) si riduce all'equazione (\*)

$$V = |V_1| \sqrt{\frac{R_t}{\rho}} \quad (11)$$

e quindi riferendosi alla  $V_g$  invece che alla  $V_1$  si ottiene

$$V = \frac{V_g}{2} \sqrt{\frac{R_t}{\rho}} \quad (11 \text{ bis})$$

(\*) Si dimostra subito quanto affermato se si sostituiscono nella prima delle (8) i valori definiti dalla (9) in funzione di  $p$ . Difatti risolvendo le (9) direttamente si trova:

$$L_1 = \frac{\rho}{R} [L_2 - R^2 C (1 + p^2 L_2 C)]; \quad M^2 = \frac{\rho}{R_t} [L_2^2 - \frac{R_t^2}{p^2} (1 + p^2 L_2 C)^2]$$

e sostituendo queste espressioni nella prima delle (8) si ha:

$$V = V_1 \sqrt{\frac{R_t}{\rho}} \sqrt{\frac{p L_2 - R_t (1 + p^2 L_2 C)}{p L_2 + R_t (1 + p^2 L_2 C)}}$$

passando da  $p$  a  $j\omega$  si trova che il secondo radicale ha sempre modulo uguale a uno.

Definito che sia il valore dei parametri relativi a tutto il circuito per un funzionamento in certe condizioni, può essere utile conoscere come vari la tensione di uscita al variare di uno di questi.

A questo scopo riportiamo qui di seguito la soluzione più generale del sistema (7) scritta per le condizioni di regime sinusoidale.

$$V = V_g \frac{j\omega M}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] - \frac{\omega_0 L_1}{Q} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 - K^2) + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \omega_0 L_1 \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 (1 - K^2) + \frac{\rho}{\omega_0 L_1 Q} \right]}$$

### § 6) - I PARAMETRI EQUIVALENTI DEL FASCIO

Supponiamo che la cavità risonante sia senza perdite e che sia alimentata da un generatore ideale  $V_1 = V_g$  e ricaviamo l'espressione della  $V$  in questa ipotesi:

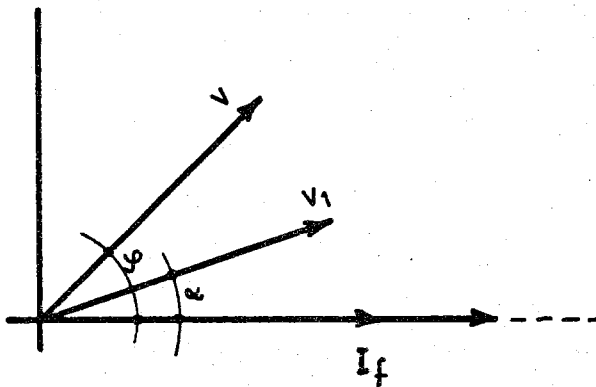


Fig. 6

Chiaramente basterà porre  $\rho = r = 0$  nelle equazioni 2 per ottenere ciò che si vuole.

Conviene però, al solo fine di semplificare il calcolo, cambiare il sistema di riferimento dei vettori e assumere come fase di riferimento quella della corrente  $I_f$ .

In questo modo il diagramma delle tensioni e delle correnti diventa quello dato in fig. 6.

Con questo riferimento e nelle ipotesi fatte la prima delle equazioni 2 diventa

$$V(\cos\phi + j\sin\phi) = \frac{-MV_1(\cos\alpha + j\sin\alpha) + j\omega I_f(L_1L_2 - M^2)}{\omega^2 C(L_1L_2 - M^2) - L_1} \quad (12)$$

da questa equazione si può ricavare  $V_1$  e cioè

$$V_1(\cos\alpha + j\sin\alpha) = \frac{-[\omega^2 C(L_1L_2 - M^2) - L_1](\cos\phi + j\sin\phi)V + j\omega I_f(L_1L_2 - M^2)}{M}$$

e quindi dividendo i termini reali da quelli immaginari

$$V_1 \cos \alpha = - \frac{[\omega_2 C(L_1 L_2 - M^2) - L_1] V \cos \varphi}{M} \quad (13)$$

$$V_1 \sin \alpha = \frac{\omega I_f(L_1 L_2 - M^2) - [\omega^2 C(L_1 L_2 - M^2) - L_1] V \sin \varphi}{M}$$

Riconsideriamo adesso il circuito della cavità come nel caso della fig. 5; supponiamo cioè che il generatore sia  $V_g \equiv V_1$  (con impedenza di uscita nulla) mentre il carico posto in parallelo al gap sia formato da una resistenza  $R_t$  e da una capacità  $C^*$  che si suppone pure essa in parallelo a quella della cavità. La fig. 7 chiarisce la situazione. Ovviamente si potranno applicare le equazioni (8) pur di sostituire  $C_t = C + C^*$  al posto della capacità  $C$ . Possiamo anche, in analogia con quanto fatto prima indicare con  $\varphi$  l'angolo che la tensione ai capi di  $R_t$  fa con  $V_1$  ed assegnare a  $V_1$  non la fase zero ma la fase arbitraria  $\alpha$ .

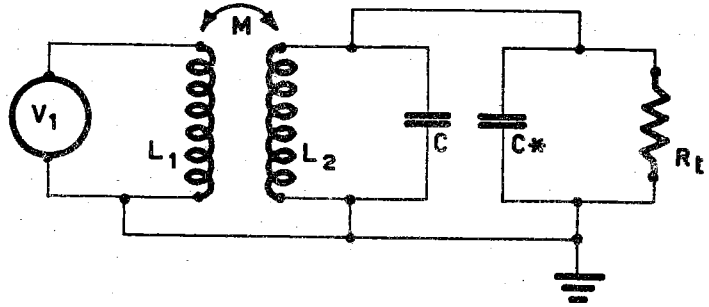


Fig. 7

La prima delle equazioni (8) risulta quindi così modificata:

$$V(\cos \varphi + j \sin \varphi) = V_1(\cos \alpha + j \sin \alpha) \frac{MR_t}{L_1 R_t - \omega^2 C_t R_t (L_1 L_2 - M^2) + j \omega (L_1 L_2 - M^2)}$$

e quindi ricavando le componenti del vettore  $V_1$  si ha:

$$V_1 \cos \alpha = \frac{V \cos \varphi [L_1 R_t - \omega^2 (C + C^*) R_t (L_1 L_2 - M^2)] - \omega V \sin \varphi (L_1 L_2 - M^2)}{MR_t} \quad (14)$$

$$V_1 \sin \alpha = \frac{V \sin \varphi [L_1 R_t - \omega^2 (C + C^*) R_t (L_1 L_2 - M^2)] + \omega V \cos \varphi (L_1 L_2 - M^2)}{MR_t}$$

Dato che il circuito è lo stesso, se  $V_1$  e  $V$  devono avere lo stesso valore nei due casi occorre trovare che valore devono avere  $R_t$  e  $C$ , perché le (14) coincidano con le (13).

Imponendo l'eguaglianza tra i componenti reali e tra i componenti in quadratura che compaiono nei due gruppi di equazioni si ha:

$$\begin{aligned}
 V \cos \varphi R_t [L_1 - \omega^2 (C + C^*) (L_1 L_2 - M^2)] - \omega V \sin \varphi (L_1 L_2 - M^2) &= -R_t [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] V \cos \varphi \\
 V \sin \varphi R_t [L_1 - \omega^2 (C + C^*) (L_1 L_2 - M^2)] + \omega V \cos \varphi (L_1 L_2 - M^2) &= R_t I_f \omega (L_1 L_2 - M^2) + \\
 - R_t V \cos \varphi [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] &
 \end{aligned} \quad (15)$$

moltiplicando la prima equazione per  $-\sin \varphi$ ; la seconda per  $\cos \varphi$  e addizionando si ricava il valore di  $R_t$  che, sostituito nella prima equazione, permette di ricavare  $C^*$ . Eseguendo i passaggi si trovano le relazioni fondamentali cercate:

$$\begin{aligned}
 R_t &= \frac{V}{I_f \cos \varphi} \\
 C^* &= -\frac{I_f \sin \varphi}{\omega V}
 \end{aligned} \quad (16)$$

Le relazioni (16) sono estremamente importanti in quanto consentono di analizzare il comportamento del risuonatore caricato dal fascio semplicemente analizzando il comportamento di un risuonatore caricato da una resistenza e da una capacità che dipendono dalle condizioni di eccitazione volute.

Si spiega quindi anche il significato del disaccordo che si deve introdurre stando alla equazione (6). Difatti il carico del fascio contiene anche il carico dato da una capacità che ha il valore dato dalla seconda delle (16). Non sarà quindi in generale possibile trovare che la pulsazione di eccitazione deve coincidere con la pulsazione di risonanza.

La trattazione svolta fino a qui conduce alle conclusioni che vogliamo qui brevemente riassumere in forma qualitativa.

- 1°) Il fascio circolante nella macchina scambia energia attiva e reattiva con il risuonatore.
- 2°) A seconda della fase tra la tensione  $V$  e la corrente  $I_f$  il fascio cede o riceve energia.
- 3°) In generale sarà possibile ottenere una fase arbitraria tra fascio e tensione al gap solo imponendo particolari condizioni sul risuonatore.
- 4°) La corrente al circuito primario può sempre essere mantenuta in fase con la tensione del generatore, accordando opportunamente il circuito secondario.
- 5°) La variazione di capacità equivalente è tanto più sensibile percentualmente, quanto più piccola è la capacità del circuito secondario; ciò nonostante si deve cercare per il circuito se-

condario la capacità più piccola possibile. Intuitivamente si può comprendere come un valore di capacità piccolo conduca ad un fattore di merito basso e quindi ad una grande banda passante che rende sempre meno importante l'effetto di disaccordo introdotto dalle variazioni del carico. Matematicamente ciò risulta immediato dalle (10 bis), dove infatti al tendere a zero di  $Q$ , il coefficiente di accoppiamento tende ad 1, per qualunque valore del disaccordo.

#### § 7) - CONSIDERAZIONI GENERICHE DI PROGETTO

Le considerazioni svolte fin qui permettono di semplificare grandemente il calcolo di progetto e di verifica, che può essere svolto nel modo seguente.

- 1°) Sono date le condizioni di lavoro e cioè la pulsazione  $\omega$ , la corrente del fascio  $I_f$ , la tensione  $V$  acceleratrice e lo sfasamento che si vuole tra corrente e tensione; si possono così calcolare la resistenza  $R$  e la capacità (positiva o negativa) dovuta al fascio.
- 2°) Si fissano in base all'esperienza il fattore di merito e la resistenza parallela equivalente del risonatore, che dovrà accelerare il fascio. Il fattore di merito e la resistenza parallela dipendono dal tipo del risonatore che si può impiegare ed entro certi limiti possono essere considerati dei dati. La scelta del particolare valore della resistenza parallela può essere dettata da particolari ragioni contingenti. Orientativamente il valore di  $R$  può essere preso maggiore od uguale a quello dovuto al fascio.
- 3°) Si calcola il nuovo fattore di merito del risonatore tenendo conto del fatto che la resistenza totale è il parallelo di  $R$  ed  $R_0$ , cioè:

$$R_t = \frac{R R_0}{R + R_0}$$

e si fissa il valore di  $\omega_0$ . (Il valore di  $\omega_0$  deve essere più basso del valore di  $\omega$  altrimenti il valore di  $L_1$  risulta negativo e  $K$  immaginario).

- 4°) Dato il valore di  $Q$  ed il valore di  $\omega_0$  si calcolano per mezzo delle (10 bis) i valori di  $L_1, L_2, K$  e  $C$  (\*). Il valore di  $C$  così calcolato va compensato aggiungendogli il valore di  $C^*$  e sono così noti i parametri del circuito.

---

(\*) Occorre tener presente che i parametri qui introdotti sono parametri equivalenti scelti per individuare quel circuito equivalente che meglio interpreta il funzionamento del risonatore. Scopo di questo lavoro non è quello di dare le regole per il passaggio dai parametri di un risonatore a quelli di un circuito equivalente ma quello di vedere quantitativamente come si comporta un circuito a costanti concentrate che interpreta nel modo migliore il comportamento di una cavità risonante.

In molti casi, quando il risonatore ha forma particolare, i parametri  $R_0, \omega_0, Q_0$  propri del risonatore nel modo fondamentale conducono, con piccoli errori, a valutare direttamente i parametri  $R, L, C$  del circuito equivalente



5°) Si calcola la tensione ai capi della spira di eccitazione che vale

$$V_1 = V \sqrt{\frac{P}{R_t}}$$

ovvero la tensione del generatore  $V_g = 2V_1$ .

Sono noti così tutti gli elementi di progetto per le condizioni di carico volute.

Nota che sia la capacità reale che deve comparire nel circuito equivalente del risonatore è immediato, per quanto scarsamente importante, calcolare l'angolo  $x$  che la corrente del fascio deve fare con la tensione del generatore. Siccome siamo nelle condizioni di adattamento l'angolo tra  $V_1$  ed  $I_1$  sarà zero e quindi zero la sua tangente trigonometrica. Segue che risolvendo l'equazione (6) si otterrà l'angolo voluto. Osserviamo che a questo punto tutti i coefficienti che compaiono nella (6) sono completamente determinati.

Le relazioni viste permettono di ricavare le caratteristiche del risonatore e del circuito che lo eccita, note che siano le caratteristiche del fascio di corrente che lo attraversa e le modalità dello scambio di energia. Nello scegliere il valore dei vari parametri rimane però un certo grado di arbitrarietà, che può essere ridotto, se si impone la condizione che tutte le fasi tra la tensione al gap del risonatore e la corrente che lo attraversa possano essere compatibili con le condizioni di eccitazioni date.

Questa condizione risulterà verificata se la tensione che il generatore può far apparire al gap del risonatore è maggiore, in valore assoluto, della tensione indotta dal fascio. Dalle equazioni (2) si deduce subito che questa condizione è verificata se è soddisfatta la disuguaglianza:

$$\frac{V_1}{I_f} > \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2}}$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  hanno il significato già visto. Si viene ad imporre così un certo valore per la resistenza che schematizza le perdite proprie del risonatore e cioè per la resistenza dinamica massima che il risonatore stesso può avere.

6°) Il progetto del risonatore e del sistema di alimentazione può dipendere fortemente dalle caratteristiche del fascio che fino ad ora si sono ritenute costanti.

Variazioni della corrente circolante nella macchina provocano oltre a variazioni di carico reale, anche variazioni dell'accordo del risonatore, che, a loro volta, possono influire notevolmente sulla tensione totale sviluppata dal risonatore stesso.

Le variazioni di accordo del risonatore, di qualunque origine siano, possono essere com-

pensate con dispositivi di accordo meccanici, predisposti nel risuonatore, che possono avere tempi di intervento dell'ordine di grandezza del mezzo secondo.

Il comando di questi dispositivi viene generalmente fatto, nelle macchine acceleratrici, tramite un rivelatore <sup>6)</sup> che sente la differenza di fase tra la tensione al gap del risuonatore e la tensione che comanda tutta la catena amplificatrice. Ciò è possibile perché ordinariamente il carico introdotto dal fascio è piccolo e le variazioni di accordo, dovute a variazioni di carico, risultano trascurabili.

Se il carico è invece notevole allora si può usare ancora lo stesso sistema, ma l'informazione deve essere presa non dalla cavità ma dalla spira di accoppiamento.

Infatti, siccome il risuonatore deve essere accordato dal carico, la corrente che percorre la spira di eccitazione dovrà sempre essere in fase con la tensione ad essa applicata ed il comando per il servo meccanismo di accordo deve essere derivato, prendendo l'informazione dalla corrente che fluisce nella spira stessa.

#### § 8) - CRITICA ALLE CONSIDERAZIONI DI PROGETTO

Le formule fino qui riportate permettono di progettare l'impianto e di verificare come varia la tensione sul risuonatore al variare del carico stesso.

In generale è importante che la tensione sul risuonatore rimanga costante il più possibile al variare delle caratteristiche del carico e di questa esigenza si può tener conto solo parzialmente con le considerazioni fatte.

Due sono le cause che introducono variazioni nelle condizioni calcolate: 1) le variazioni (rapide e lente) nella corrente del fascio; 2) le vibrazioni meccaniche che alterano istante per istante la geometria del risuonatore.

Le cause indicate portano due tipi di conseguenze; variazioni di carico reale e variazioni di accordo nel risuonatore. (Queste ultime dipendono sia da variazioni nel fascio sia dalle variazioni nella geometria del risuonatore).

Molti sono i dispositivi che si possono pensare per rendere indipendente, almeno entro certi limiti, la tensione al gap dalle variazioni considerate.

Una volta progettato l'impianto per le condizioni di massimo carico è possibile per esempio dotarlo di due distinte maglie di contro reazione secondo lo schema di fig. 8.

Come si può vedere dalla figura la tensione nel risuonatore viene letta da un rivelatore

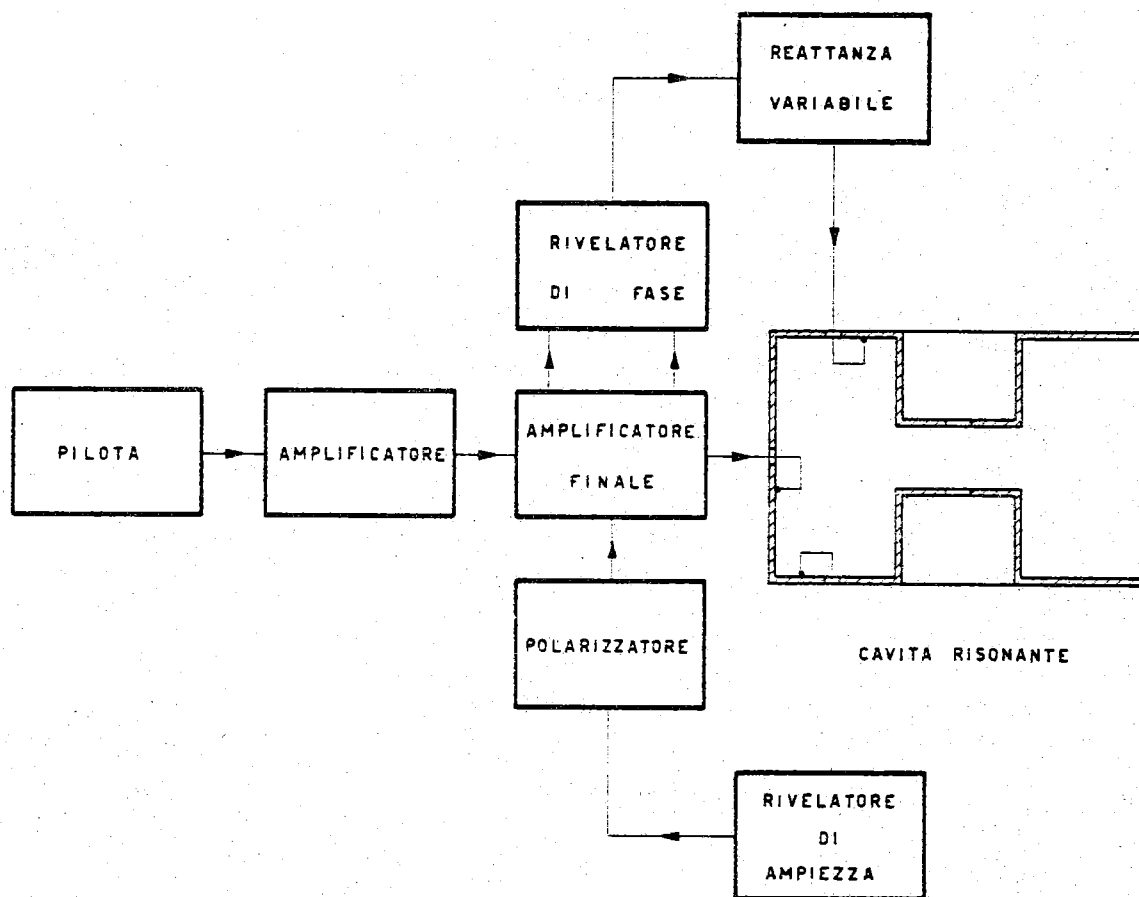


Fig. 8

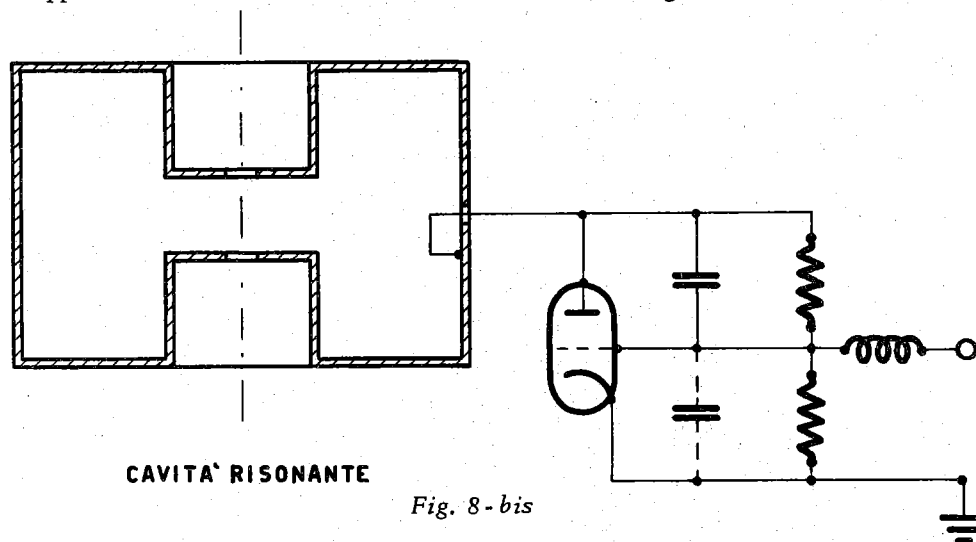
di ampiezza che comanda la potenza erogata dall'amplificatore mentre una reattanza variabile (ottenuta con tubi elettronici o con reattori a ferrite) comandata dal rivelatore di fase, tiene in accordo il risonatore.

Questo sistema, a parte le difficoltà tecniche di realizzazione, ha tre gravi inconvenienti:

- 1) L'impedenza (anche se puramente reale) che il risonatore offre alla spira di eccitazione diviene una funzione del carico e ciò mal si concilia con l'impiego di cavi coassiali tra lo amplificatore finale ed il risonatore.
- 2) Le reattanze variabili di controllo devono poter mettere in gioco notevoli potenze reattive ( $W_R = \eta Q W_A$  dove  $\eta$  è la percentuale di regolazione;  $Q$  il fattore di merito del risonatore sotto carico; e  $W_A$  la potenza attiva totale spesa), quindi risultano sempre costose ed introducono perdite che impongono un ulteriore sovradimensionamento dell'impianto.
- 3) Se non si prendono particolari precauzioni tutto il sistema può facilmente divenire instabile e l'introduzione di notevoli ritardi, concentrati, allo scopo di evitare l'instabilità, riduce grandemente l'efficacia del sistema di controllo.

Quanto detto suggerisce il criterio di far lavorare il risonatore (od i vari risonatori) a carico praticamente costante. Ciò si può ottenere facilmente dimensionando l'impianto di ciascun risonatore per le condizioni del massimo sovraccarico prevedibile ed accoppiando al risonatore stesso una resistenza variabile.

Resistenze variabili il cui valore dipenda da una tensione si ottengono molto semplicemente con tubi elettronici nei quali la placca e la griglia siano collegate da un partitore compensato di opportuno valore. Se si adotta lo schema dato in figura 8-bis si vede che non vi è



neppure bisogno dell'alimentatore ad alta tensione e la resistenza equivalente che compare tra placca e catodo della valvola che funge da carico vale:

$$R_{eq}(\nu) = \xi \frac{1}{\frac{G_m(\nu)}{K} + \frac{1}{\rho(\nu)}}$$

e viene a dipendere dai valori di  $G_m$  e  $\rho$  che a loro volta dipendono dalle condizioni di polarizzazione. (Il fattore  $\xi$  dipende dal fatto che secondo lo schema di fig. 8-bis la valvola viene a condurre per mezzo periodo, si può quindi assumere per  $\xi$  un valore intorno a due, mentre  $K$  è il rapporto fisso di partizione tra  $V_p$  e  $V_g$ ).

Così, un rivelatore di ampiezza che legga la tensione in cavità e comandi il carico variabile può stabilizzare la tensione nel risonatore di fronte alle variazioni di carico reale e la resistenza equivalente che il risonatore offre all'amplificatore terminale risulta costante.

Questo dispositivo porta anche ad escludere le reattanze variabili per il controllo rapido di accordo in quanto il carico variabile contribuisce ad allargare la banda passante del risonatore.

Come esempio riportiamo le condizioni di funzionamento per un risonatore che deve accelerare un fascio di elettroni da 1 amp con una tensione al gap di 20.000 Volt; la frequenza è di 12 MHz e la fase voluta tra tensione al gap e corrente del fascio è di  $\sim 74^\circ$  in condizioni di funzionamento normale e può scendere fino a  $\sim 57^\circ - 60^\circ$  durante le massime oscillazioni di fase.

Dalle prestazioni richieste appare che il risonatore deve cedere circa 2,75 kW al fascio in condizioni normali di funzionamento e che durante le oscillazioni di fase possono essere richiesti fino a 5,5 kW.

Ciò significa che la resistenza equivalente del fascio può passare da  $\sim 70 \text{ K}\Omega$  a  $\sim 25 \text{ K}\Omega$ .

Supponiamo di aver scelto un risonatore individuato dal valore dei seguenti parametri:  $R_o = 100.000 \Omega$ ;  $Q_o = 2700$ ;  $(\frac{\omega}{\omega_o})^2 = 1 + 10^{-3}$  ( $\omega = 0,75 \cdot 10^8 \text{ rad/sec}$ ). Se assumiamo pari a  $20 \text{ K}\Omega$  il valore del carico totale al quale il generatore deve cedere l'energia si trova che il carico variabile dovrà assorbire in condizioni di funzionamento normale  $\sim 5 \text{ KW}$ .

I valori di  $L_1$  ed  $M$  risultano essere rispettivamente:  $L_1 = 4,33 \cdot 10^{-7} \text{ H}$ ;  $M = 3,07 \cdot 10^{-8} \text{ H}$ . e l'andamento della tensione al gap è dato nel diagramma di figura 9 in funzione della capacità totale al gap. Appare come la banda passante comprenda largamente le possibili variazioni dinamiche di reattanza dovute al fascio.

Risulta quindi come, valutati che siano i valori della resistenza e reattanza equivalente al fascio e scelto un tipo di risonatore, convenga scegliere un valore minimo per la resistenza equivalente totale ed in base a questo progettare tutto l'impianto.

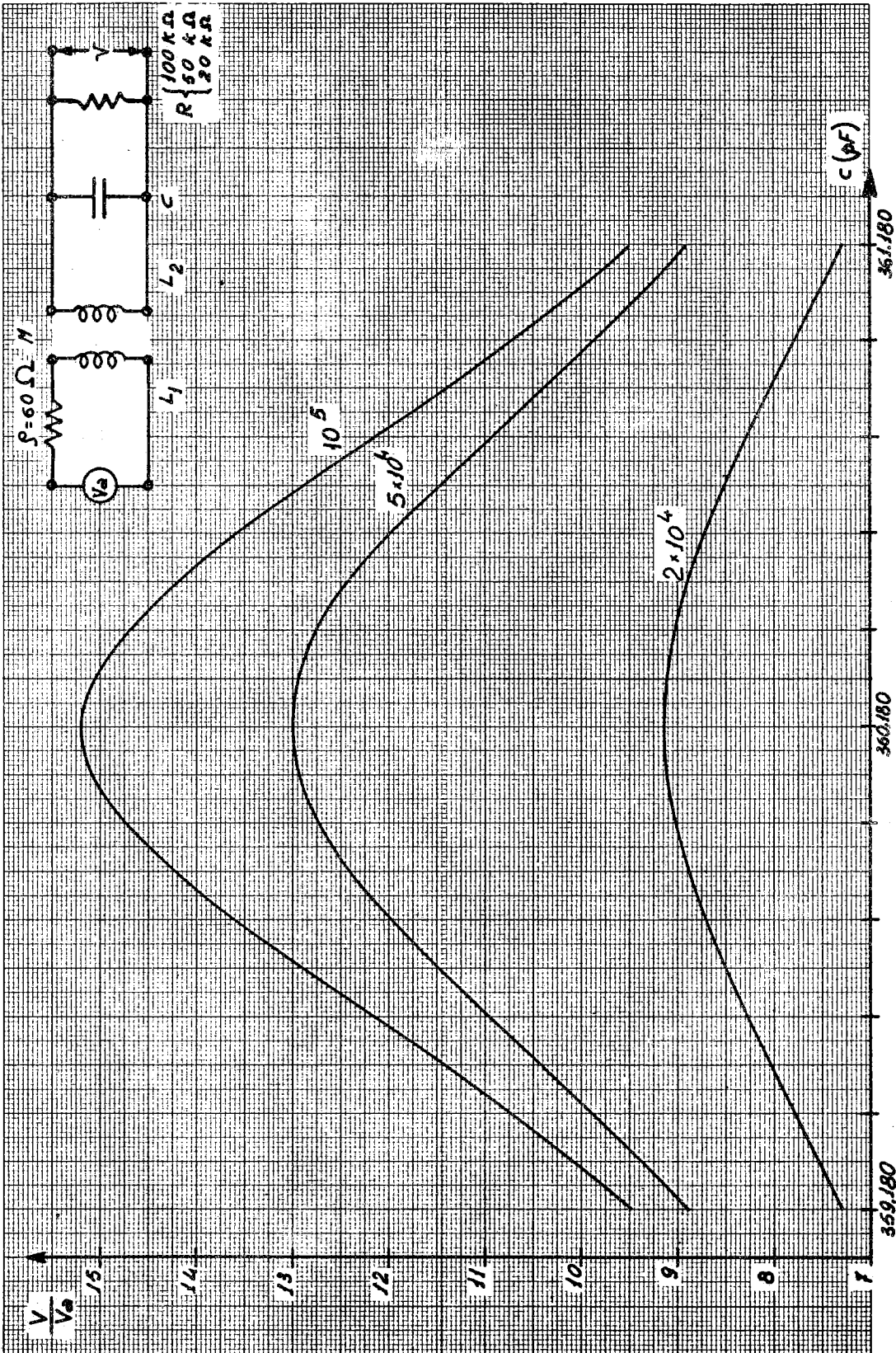


Fig. 9

## APPENDICE

### APPLICAZIONE NUMERICA

Allo scopo di chiarire l'andamento delle funzioni calcolate prendiamo in esame il caso seguente:

tensione richiesta	$V = 20 \text{ KV}$	$\omega = 1,2 \cdot 10^8 \text{ rad/sec}$
intensità del fascio	$I_f = 1 \text{ A}$	$\omega = 1,2 \cdot 10^8 \text{ rad/sec}$
fase del fascio	$\varphi \sim 75^\circ$	

Si assume che il risonatore impiegato abbia i seguenti parametri

$$R = 250.000 \ \Omega$$

$$Q = 6000$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + 2 \cdot 10^{-4}$$

La resistenza e la capacità equivalenti del fascio sono

$$R = \frac{V}{I_f \cos \varphi} \approx 80 \text{ K}\Omega$$

$$C^* = -\frac{I_f \sin \varphi}{\omega V} = 0,4 \text{ pF}$$

Imponendo che la spira di eccitazione debba essere alimentata con un cavo da  $60 \ \Omega$  si ricavano (dalle 10 bis) i valori di  $L_1$  ed  $M$  da introdurre nel circuito equivalente mentre la tensione  $V_1$  che si deve sviluppare ai capi della spira di eccitazione è definita dalla relazione (11). Ese-

guendo i calcoli e riportando i valori nella seguente tabella si ha:

$$\rho = 60$$

$$V_1 = 1276 \text{ V}$$

$$L_1 = 0,131 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

$$L_2 = 0,375 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

$$C = (185,203 - 0,4) \text{ p}^{\text{F}}$$

$$K = 0.0577$$

Nella figura A.1 è riportato il valore della tensione V al gap in funzione dell'angolo di fase  $\phi$  (e si vede che non tutte le fasi sono possibili).

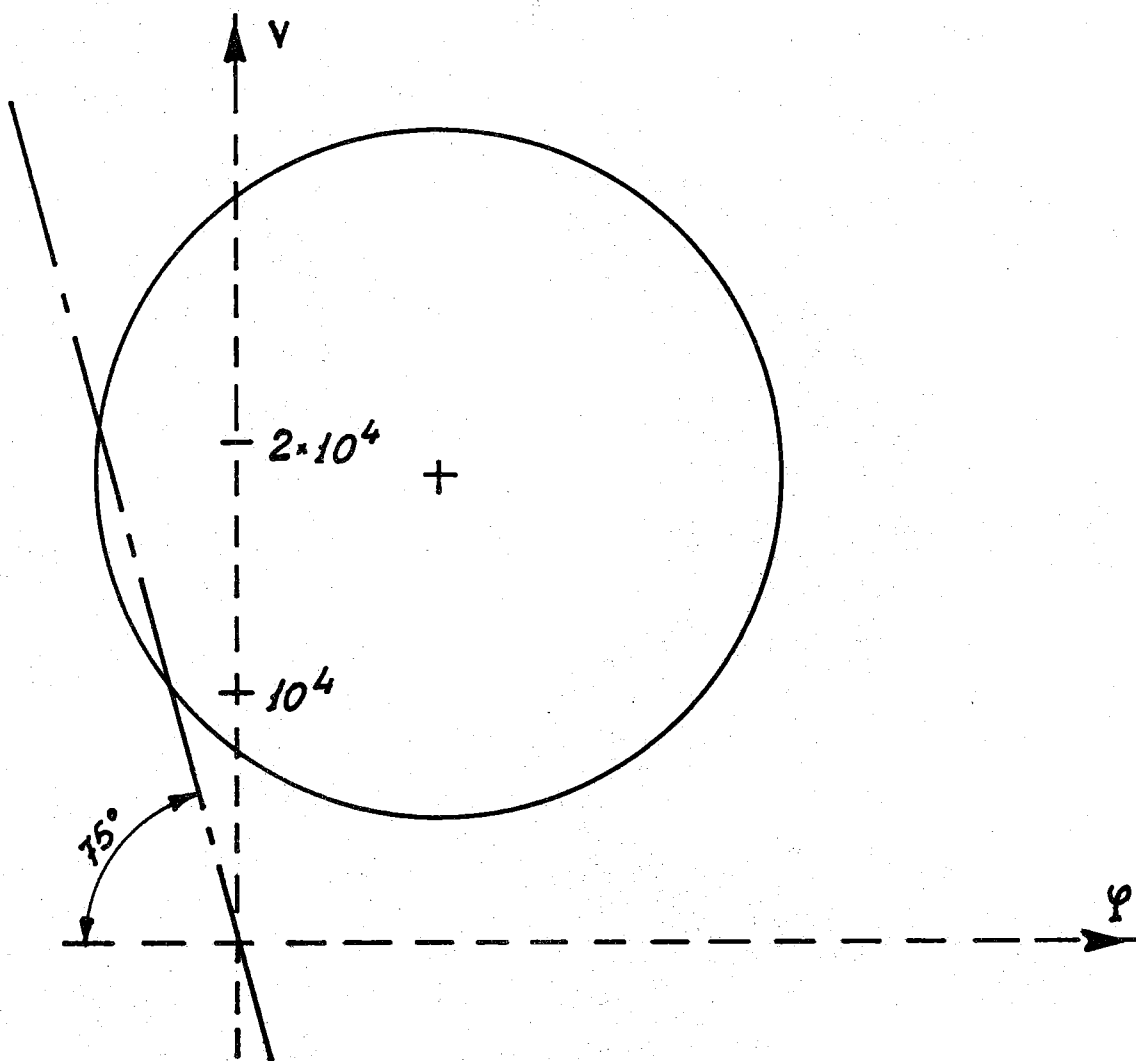


Fig. A.1



In figura A.2 sono riportati, in funzione della capacità propria del risonatore (parametro di accordo), i valori assunti dalla tensione al gap; dalla corrente al primario e dalla tg dell'angolo tra tensione e corrente al primario, in corrispondenza del valore del parametro  $X = 60^\circ$ , che è assai prossimo al valore che risolve esattamente il problema.

Se si assume come variabile il rapporto  $\frac{\omega}{\omega_0}$  e come parametro il rapporto  $R_t/\rho$  si possono normalizzare le relazioni 10 bis.

Nelle figg. A.3 e A.4 sono dati i valori delle funzioni  $\frac{L_1 \rho}{L_2 R_t}$  e K. Noti che siano i dati di progetto ed  $R_t$  è possibile scegliere i valori di  $L_1$  e K compatibili con una certa pulsazione di accordo e con un certo fattore di merito globale assunti per il circuito secondario.

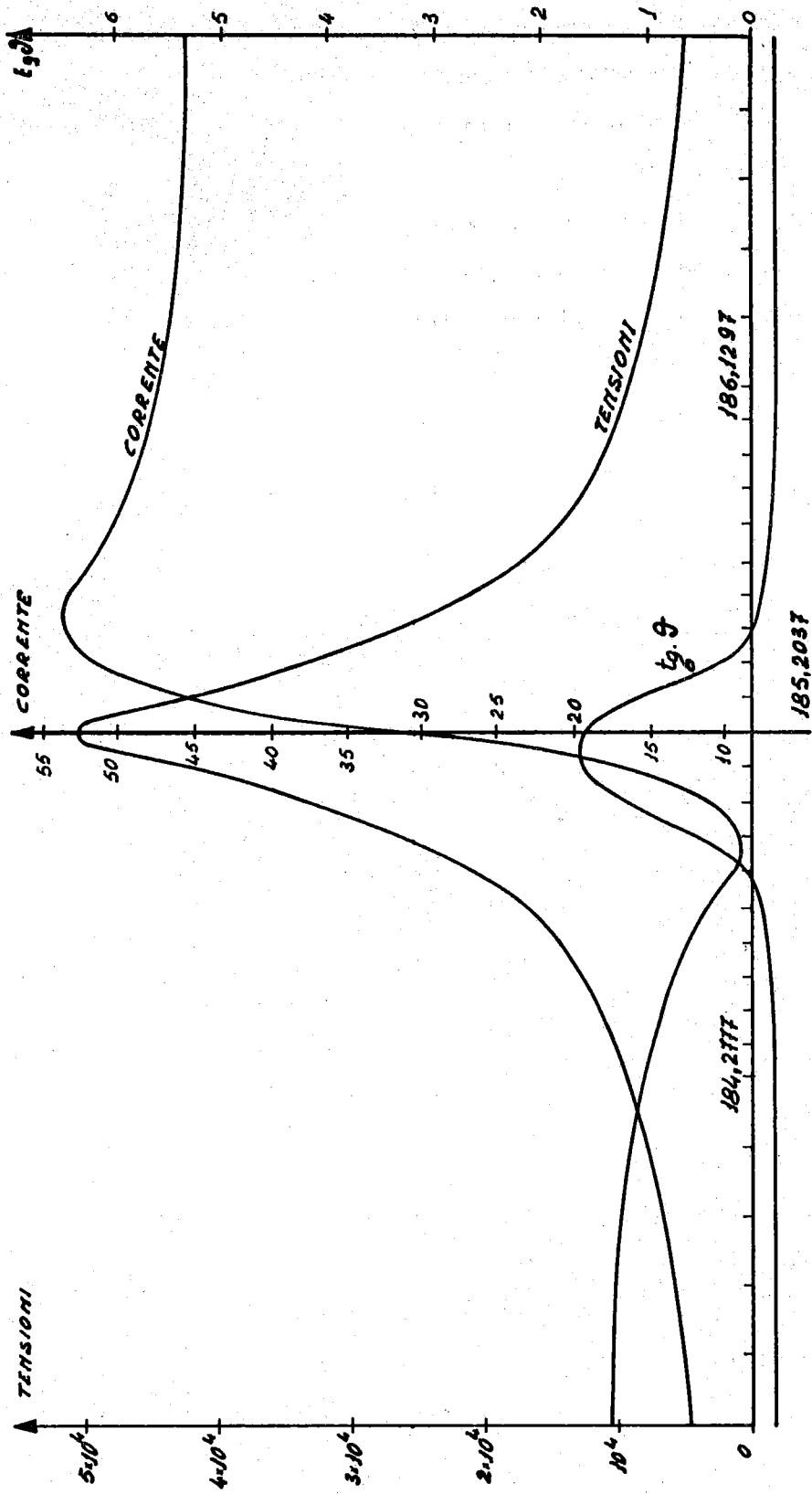


Fig. A2

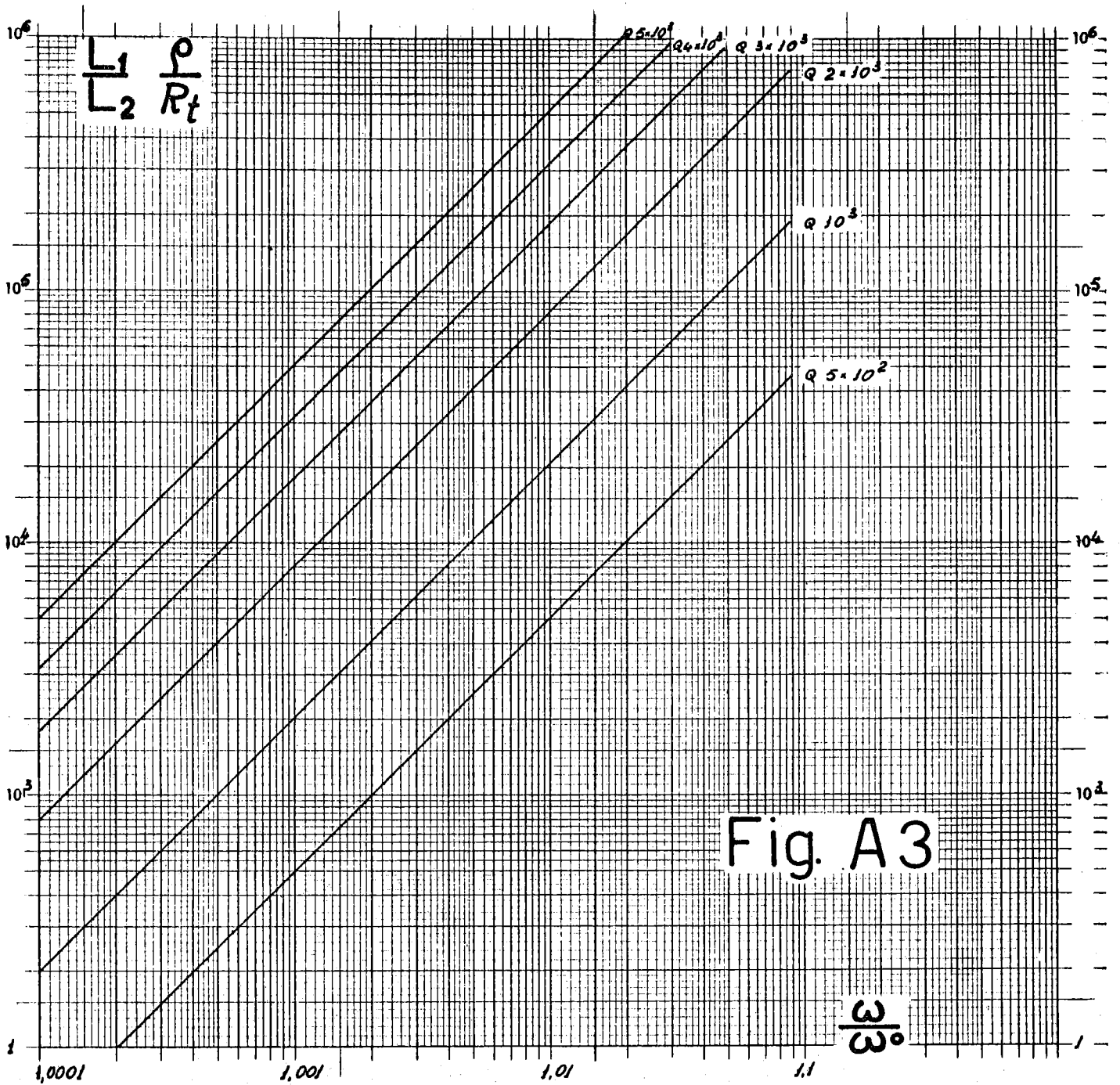


Fig. A3

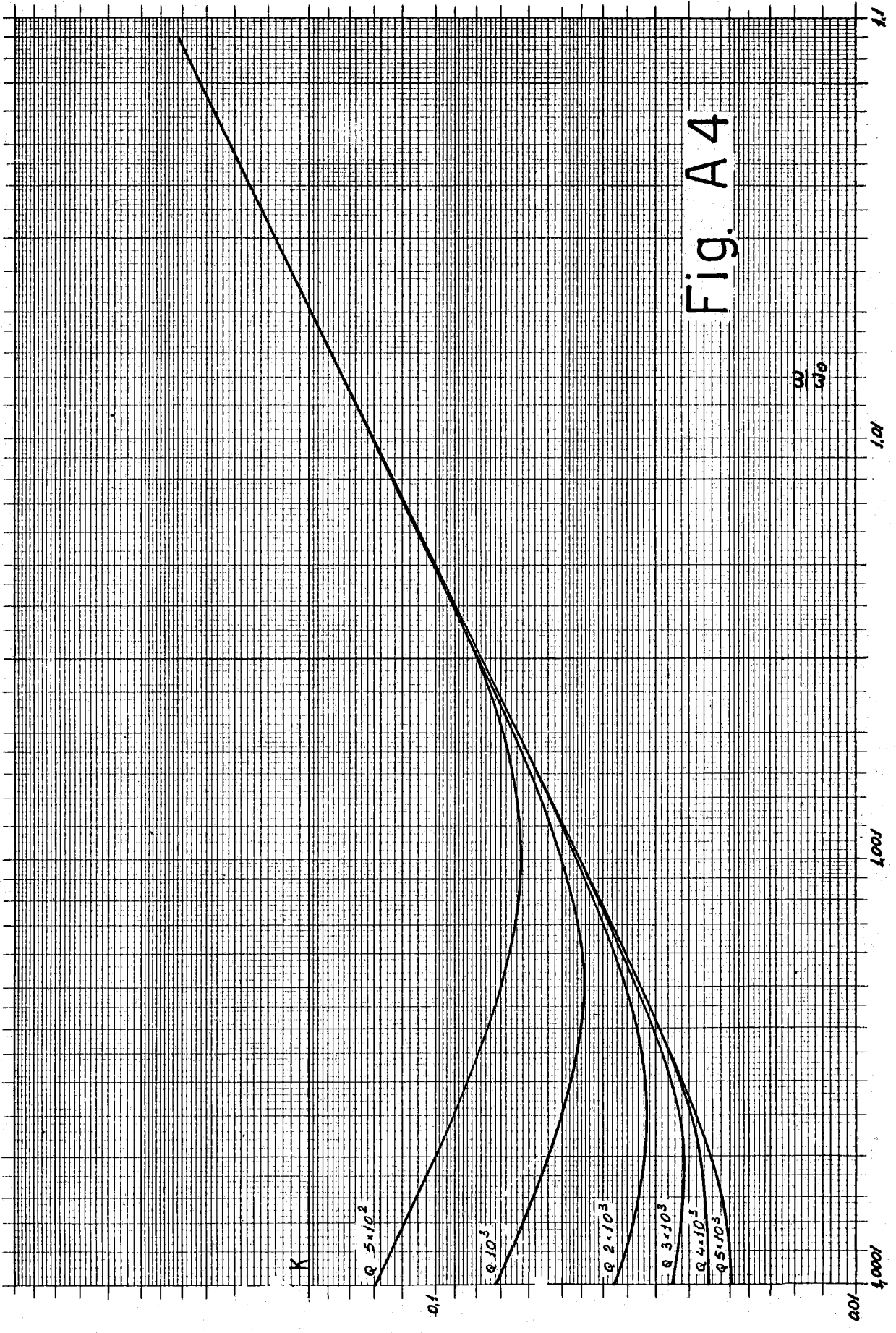


Fig. A4

10  
100

100

1000

1000

100

## RINGRAZIAMENTI

*Desidero qui ringraziare il gruppo «calcoli numerici» diretto dal dott. A. Turrin e particolarmente la dottoressa M.A. Spano per aver eseguito numerosissime tabulazioni e verifiche numeriche. Ringrazio altresì il Sig. A. Marzolla, laureando presso codesti laboratori, per la sua collaborazione ed i dottori M. Bassetti ed A. Massarotti per molte utili discussioni sull'argomento.*

## BIBLIOGRAFIA

- 1) G.M. BRANCH, *Electron beam coupling in interaction gaps of cylindrical symmetry*, IRE Trans. on Electron Devices 8, 193 (1961).
- 2) T. MORENO, *Microwave Transmission Design Data*. Dover Pubbl, 1958.
- 3) L.J. LASLETT, V. KELVIN NEIL and A.M. SESSLER, *Coherent electromagnetic effects in high current particle accelerators*, Rev. Sci. Instr. 32, 276 (1961).
- 4) V. KELVIN NEIL, *Beam loading of radio frequency cavity*, Thesis, Radiation Lab. Berkeley, UCRL 9124.
- 5) M. PUGLISI and I.F. QUERCIA, *Electrons loading on a radio frequency accelerating cavity of a 1 GeV synchrotron*, Laboratori Nazionali di Frascati - LNF-57/7 (10 Giugno 1957).
- 6) A. MASSAROTTI e M. PUGLISI, *Studio di un discriminatore di fase per l'accordo dei risuonatori a cavità impiegati nelle macchine acceleratrici* - C.N.E.N. - RTEL(62) 14.